Como g es derivable en x, es continua allí (véase el teorema 2.2A), y de este modo $\Delta x \to 0$ fuerza a $\Delta u \to 0$. De aquí que,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Esta demostración es muy directa, pero desafortunadamente contiene un error sutil. Existen funciones $u = g(x)$ con la propiedad de que $\Delta u = 0$ para algunos puntos en toda vecindad de x (la función constante $g(x) = k$ es un buen ejemplo). Esto significa que la división entre Δu en nuestro primer paso podría no ser legal. No hay una forma sencilla de dar la vuelta a esta dificultad, aunque la regla de la cadena es válida, incluso en este caso. Damos una demostración completa de la regla de la cadena en el apéndice (véase la sección A.2, teorema B). ■

Revisión de conceptos

1. Si $y = f(u)$, donde $u = g(t)$, entonces $D_t y = D_u y \cdot$ ______. En notación de funciones, $(f \circ g)'(t) =$ ______ ______.

2. Si $w = G(v)$, donde $v = H(s)$, entonces $D_s w =$ ______ $D_s v$. En notación de funciones $(G \circ H)'(s) =$ ______ ______.

3. $D_x \cos[(f(x))^2] = -\text{sen}($______$) \cdot D_x($______$)$.

4. Si $y = (2x+1)^3 \text{sen}(x^2)$, entonces $D_x y = (2x+1)^3 \cdot$ ______ $+ \text{sen}(x^2) \cdot$ ______.

Conjunto de problemas 2.5

En los problemas del 1 al 20 encuentre $D_x y$.

1. $y = (1+x)^{15}$ **2.** $y = (7+x)^5$

3. $y = (3-2x)^5$ **4.** $y = (4+2x^2)^7$

5. $y = (x^3 - 2x^2 + 3x + 1)^{11}$ **6.** $y = (x^2 - x + 1)^{-7}$

7. $y = \dfrac{1}{(x+3)^5}$ **8.** $y = \dfrac{1}{(3x^2 + x - 3)^9}$

9. $y = \text{sen}(x^2 + x)$ **10.** $y = \cos(3x^2 - 2x)$

11. $y = \cos^3 x$ **12.** $y = \text{sen}^4(3x^2)$

13. $y = \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$ **14.** $y = \left(\dfrac{x-2}{x-\pi}\right)^{-3}$

15. $y = \cos\left(\dfrac{3x^2}{x+2}\right)$ **16.** $y = \cos^3\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

17. $y = (3x-2)^2(3-x^2)^2$ **18.** $y = (2-3x^2)^4(x^7+3)^3$

19. $y = \dfrac{(x+1)^2}{3x-4}$ **20.** $y = \dfrac{2x-3}{(x^2+4)^2}$

En los problemas del 21 al 28 encuentre la derivada que se indica.

21. y' donde $y = (x^2+4)^2$ **22.** y' donde $y = (x + \text{sen}\, x)^2$

23. $D_t\left(\dfrac{3t-2}{t+5}\right)^3$ **24.** $D_s\left(\dfrac{s^2-9}{s+4}\right)$

25. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{(3t-2)^3}{t+5}\right)$ **26.** $\dfrac{d}{d\theta}(\text{sen}^3\,\theta)$

27. $\dfrac{dy}{dx}$, donde $y = \left(\dfrac{\text{sen}\, x}{\cos 2x}\right)^3$

28. $\dfrac{dy}{dt}$, donde $y = [\text{sen}\, t \tan(t^2+1)]$

En los problemas del 29 al 32 evalúe la derivada que se indica.

29. $f'(3)$,si $f(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x+2}\right)^3$

30. $G'(1)$ si $G(t) = (t^2+9)^3(t^2-2)^4$

C **31.** $F'(1)$ si $F(t) = \text{sen}(t^2 + 3t + 1)$

32. $g'\left(\frac{1}{2}\right)$ si $g(s) = \cos \pi s\, \text{sen}^2\, \pi s$

En los problemas del 33 al 40 aplique la regla de la cadena más de una vez para encontrar la derivada que se indica.

33. $D_x[\text{sen}^4(x^2+3x)]$ **34.** $D_t[\cos^5(4t-19)]$

35. $D_t[\text{sen}^3(\cos t)]$ **36.** $D_u\left[\cos^4\left(\dfrac{u+1}{u-1}\right)\right]$

37. $D_\theta[\cos^4(\text{sen}\,\theta^2)]$ **38.** $D_x[x\, \text{sen}^2(2x)]$

39. $\dfrac{d}{dx}\{\text{sen}[\cos(\text{sen}\, 2x)]\}$ **40.** $\dfrac{d}{dt}\{\cos^2[\cos(\cos t)]\}$

En los problemas 41 al 46 utilice las figuras 2 y 3 para aproximar las expresiones que se indican.

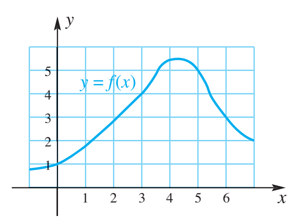

Figura 2

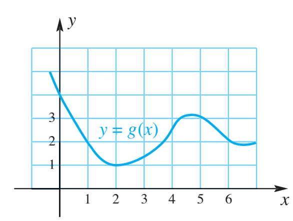

Figura 3

41. $(f+g)'(4)$ **42.** $(f-2g)'(2)$

43. $(fg)'(2)$ **44.** $(f/g)'(2)$

45. $(f \circ g)'(6)$ **46.** $(g \circ f)'(3)$

En los problemas del 47 al 58 exprese la derivada que se indica en términos de la función $F(x)$. Suponga que F es derivable.

47. $D_x(F(2x))$ **48.** $D_x(F(x^2+1))$

49. $D_t((F(t))^{-2})$

50. $\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(F(z))^2}\right)$

51. $\frac{d}{dz}(1 + (F(2z)))^2$

52. $\frac{d}{dy}\left(y^2 + \frac{1}{F(y^2)}\right)$

53. $\frac{d}{dx}F(\cos x)$

54. $\frac{d}{dx}\cos F(x)$

55. $D_x \tan F(2x)$

56. $\frac{d}{dx}g(\tan 2x)$

57. $D_x(F(x)\,\text{sen}^2\,F(x))$

58. $D_x \sec^3 F(x)$

59. Dado que $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$, determine $g'(0)$ en donde $g(x) = \cos f(x)$.

60. Dado que $F(0) = 2$ y $F'(0) = -1$, determine $G'(0)$ en donde $G(x) = \dfrac{x}{1 + \sec F(2x)}$.

61. Dado que $f(1) = 2, f'(1) = -1, g(1) = 0$ y $g'(1) = 1$, determine $F'(1)$, en donde $F(x) = f(x)\cos g(x)$.

62. Determine una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = 1 + x\,\text{sen}\,3x$ en $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$. ¿En dónde esta recta corta al eje x?

63. Determine todos los puntos en la gráfica de $y = \text{sen}^2\,x$, donde la recta tangente tiene pendiente 1.

64. Encuentre la ecuación de la recta tangente a $y = (x^2 + 1)^3(x^4 + 1)^2$ en $(1, 32)$.

65. Determine la ecuación de la recta tangente a $y = (x^2 + 1)^{-2}$ en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$.

66. ¿En dónde cruza el eje x la recta tangente a $y = (2x + 1)^3$ en $(0, 1)$?

67. La recta tangente a $y = (x^2 + 1)^{-2}$ en $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, ¿en dónde cruza el eje x?

68. Un punto P está moviéndose en el plano de modo que sus coordenadas después de t segundos son $(4 \cos 2t, 7\,\text{sen}\,2t)$, medidas en pies.

(a) Demuestre que P está siguiendo una trayectoria elíptica. *Sugerencia:* demuestre que $(x/4)^2 + (y/7)^2 = 1$, que es una ecuación de una elipse.

(b) Obtenga una expresión para L, la distancia de P al origen en el instante t.

(c) ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre P y el origen cuando $t = \pi/8$? Necesitará el hecho de que $D_u\left(\sqrt{u}\right) = 1/\left(2\sqrt{u}\right)$ (véase el ejemplo 4 de la sección 2.2).

69. Una rueda con centro en el origen y de radio 10 centímetros gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a una velocidad de 4 revoluciones por segundo. Un punto P en el borde está en $(10, 0)$ cuando $t = 0$.

(a) ¿Cuáles son las coordenadas de P después de t segundos?

(b) ¿A qué velocidad se está elevando (o descendiendo) P en el instante $t = 1$?

70. Considere el dispositivo rueda-pistón de la figura 4. La rueda tiene radio de 1 pie y gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, a 2 radianes por segundo. La varilla conectada tiene 5 pies de longitud. El punto P está en $(1, 0)$ cuando $t = 0$

(a) Encuentre las coordenadas de P en el instante t.

(b) Encuentre la ordenada (coordenada y) de Q en el instante t (la abscisa siempre es cero).

(c) Determine la velocidad de Q en el instante t. Necesitará el hecho de que $D_u\left(\sqrt{u}\right) = 1/\left(2\sqrt{u}\right)$.

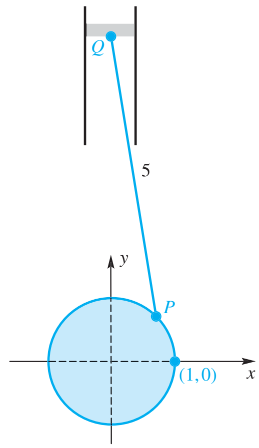

Figura 4

71. Haga el problema 70, suponiendo que la rueda está girando a 60 revoluciones por minuto y t se mide en segundos.

72. La carátula de un reloj común tiene un radio de 10 centímetros. Un extremo de una cuerda elástica se sujeta al borde en el 12 y el otro extremo a la punta del minutero, que es de 10 centímetros de longitud. ¿A qué velocidad se está estirando la cuerda a las 12:15 (suponiendo que el reloj no se retrasa debido a este estiramiento)?

C **73.** El horario y el minutero de un reloj son de 6 y 8 pulgadas de longitud, respectivamente. ¿Qué tan rápido se están separando las manecillas a las 12:20 (véase la figura 5)? *Sugerencia:* ley de los cosenos.

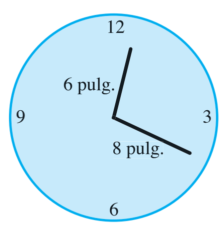

Figura 5

≈ GC **74.** Encuentre el tiempo aproximado entre las 12:00 y la 1:00 cuando la distancia s entre las puntas de las manecillas del reloj de la figura 5 está aumentando más rápidamente, esto es, cuando la derivada ds/dt es mayor.

75. Sea x_0 el valor positivo más pequeño de x en el que las curvas $y = \text{sen}\,x$ y $y = \text{sen}\,2x$ se intersecan. Determine x_0 y también el ángulo agudo en el que las dos curvas se intersecan en x_0 (véase el problema 40 de la sección 0.7).

76. Un triángulo isósceles está coronado por un semicírculo, como se muestra en la figura 6. Sea D el área del triángulo AOB y E, el área de la región sombreada. Determine una fórmula para D/E en términos de t y luego calcule

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{D}{E} \quad \text{y} \quad \lim_{t \to \pi^-} \frac{D}{E}$$